УДК 517.9

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

©С. П. Лавренюк

Пусть Ω-ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \subset C^m$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Рассмотрим в Q_T систему

$$\Phi(x,t)u_{tt}+C(x,t)u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u)+ \\ + \sum_{|\alpha|\le m} B_\alpha(x,t)D^\alpha u = F(x,t), \tag{1}$$

где Φ, C, $A_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| \le m)$, $B_\varkappa(|\varkappa| \le m)$-квадратные матрицы размера $N \times N$, $u = (u_1,\dots,u_N)$, $f = (f_1,\dots,f_N)$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots,\partial x_n^{\alpha_n}}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Будем говорить, что коэффициенты системы (1) удовлетворяют соответственно условиям (Φ_0), (C_0), (A_0), если:

$$(\Phi_0): \ \Phi(x,t) = \Phi^*(x,t), \ (x,t) \in Q_T;$$
$$\varphi(t)|\xi|^2 \le (\Phi(x,t)\xi,\xi) \le \varphi_0\varphi(t)|\xi|^2,$$
$$\varphi_2(t)\varphi'(t)|\xi|^2 \le (\Phi_t(x,t)\xi,\xi) \le \varphi_1(t)\varphi'(t)|\xi|^2,$$
$$\forall\xi \in \mathbb{R}^N, \ (x,t) \in Q_T,$$

где $\varphi(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\varphi'(t)$ - монотонно возрастает;

$$(C_0): \ (C(x,t)\xi,\xi) \ge C_1(t)|\xi|^2, \ \forall\xi \in \mathbb{R}^N, \ (x,t) \in Q_T;$$
$$(A_0): \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}D^\beta v, D^\alpha v)dx \ge$$
$$\ge a_0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2 dx, \ t \in [0,T], a_0 > 0;$$

$\forall v \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$; $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\alpha\beta}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $|\alpha| = |\beta| \le m$, $(x,t) \in Q_T$; $\Omega_\tau = \{t = \tau\} \cap Q_T$.

Рассмотрим для системы (1) в области Q_T задачу с краевыми

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\Big|_{S_T} = 0, \ i = 0,\dots,m-1 \tag{2}$$

и начальными

$$u(x,0) = 0, \ \lim_{t\to+0} \sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t) = 0 \tag{3}$$

условиями, где ν-внешняя нормаль к S_T.

Введем обозначения:

$$\nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]} \Big[\varphi_1(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)}\Big];$$

$$\nu_2 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,t]} \Big[\frac{4\gamma\varphi_0\varphi(\tau)}{\tau\varphi'(\tau)} - \varphi_2(\tau) - \frac{2c_1(\tau)}{\varphi'(\tau)}\Big],\ \gamma \geq 0;$$

$$b_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{||B_\alpha(x,\tau)||^2}{\varphi'(\tau)};$$

$$b_1(t) = \sup_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{||B_{\alpha t}(x,t)||^2 t^\omega}{\varphi'(t)},\ \omega \in [0,1);$$

$$\rho_0(t) = \sup_{\Omega_t} \Big[\Big(\frac{||B_0(x,t)||^2}{t^2} + \frac{||C(x,t)||^2}{t^2} + ||C_t(x,t)||^2 + $$
$$+ \frac{||\Phi(x,t)||^2}{t^4} + \frac{||\Phi_t(x,t)||^2}{t^2}\Big)\frac{t^\omega}{\varphi(t)\varphi'(t)} + \Big(\frac{||C(x,t)||^2}{t^4} +$$
$$+ \frac{||C_t(x,t)||^2}{t^2} + \frac{||\Phi(x,t)||^2}{t^6} + \frac{||\Phi_t(x,t)||^2}{t^4}\Big)\frac{t^\omega}{\varphi'(t)}\Big];$$

$$\rho_1(t) = b_1(t) + \rho_0(t).$$

Теорема 1 . *Пусть выполняются условия* (Φ_0), (C_0), (A_0) *и, кроме того,*

$$\Phi,\ D^\alpha A_{\alpha\beta} \in C(\overline{Q}_T),\ |\alpha| = |\beta| \leq m;$$
$$A_{\alpha\beta t},\ A_{\alpha\beta tt},\ C,\ \Phi_t \in L^\infty(Q_T),\ |\alpha| = |\beta| \leq m;$$
$$C_t \in L^\infty(Q_{t_0},T),\ b_1(t) \in L^\infty(t_0,T)\ \forall t_0 > 0;$$
$$b_0 \in L^\infty(0,T);\ -\infty < \nu_i < 0,\ i = 1,2;$$
$$\int_{Q_T} \frac{\rho_2(t)|F|^2 + t^{2\gamma}|F_t|^2}{\varphi'(t)} dxdt < \infty,\ \gamma > 0,$$

где $\rho_2(t) \in L^\infty(t_0,T)$, $\forall t_0 > 0$ *монотонно убывает и такая, что* $\rho_1(t)t^{2\gamma} \leq \rho_2(t)$. *Тогда существует единственное решение почти всюду* $u(x,t)$ *задачи (1)-(3), причем*

$$\sqrt{\varphi}u_t \in C\big([0,T],\ (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N\big).$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi^k(x)\}$ -полная система функций в пространстве $W = (H^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$. Рассмотрим последовательность

$$u^{p,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^{p} C_k^{p,\varepsilon}(t)\varphi^k(x),$$

где $c_1^{p,\varepsilon}(t),\dots,c_p^{p,\varepsilon}(t)$-решение задачи Коши:

$$\int_{\Omega_t} \Big[\big((\Phi(x,t)+\varepsilon E)u_{tt}^{p,\varepsilon},\varphi^k\big) + \big(C(x,t)u_t^{p,\varepsilon},\varphi^k\big) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} \big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^{p,\varepsilon}, D^\alpha\varphi^k\big) + \qquad (4)$$
$$+ \sum_{|\alpha|\leq m} \big(B_\alpha(x,t)D^\alpha u^{p,\varepsilon},\varphi^k\big) - \big(F(x,t),\varphi^k\big)\Big]dx = 0,$$

$$c_k^{p,\varepsilon}(0) = 0,\ c_{kt}^{p,\varepsilon}(0) = 0,\ k = 1,\ldots,p, t \in [0,T]. \tag{5}$$

Здесь E-единичная матрица, $0 < \varepsilon < T$.

Умножим каждое из уравнений системы (4) соответственно на функцию $c_{kt}^{p,\varepsilon}(t)e^{-\theta t}, \theta > 0$, просуммируем их и проинтегрируем по промежутку $[0,\tau]$, $\tau \le T$. После выполнения этих операций получим равенство

$$\int_{Q_\tau} \Big[((\Phi + \varepsilon E)u_{tt}^{p,\varepsilon}, u_t^{p,\varepsilon}) + (Cu_t^{p,\varepsilon}, u_t^{p,\varepsilon}) + \\ + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}D^\beta u^{p,\varepsilon}, D^\alpha u_t^{p,\varepsilon}) + \sum_{|\alpha|\le m} (B_\alpha D^\alpha u^{p,\varepsilon}, u_t^{p,\varepsilon}) - \\ - (F, u_t^{p,\varepsilon})\Big] e^{-\theta t} dx dt = 0. \tag{6}$$

Преобразуем и оценим каждый член равенства (6) отдельно. Используя условия теоремы и (5), получим:

$$I_1 = \int_{Q_\tau} ((\Phi + \varepsilon E)u_{tt}^{p,\varepsilon}, u_t^{p,\varepsilon})e^{-\theta t} dx dt \ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} [\varphi(\tau) + \varepsilon]|u_t^{p,\varepsilon}|^2 e^{-\theta\tau} dx + \\ + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} [\theta(\varphi(t) + \varepsilon) - \varphi_1(t)\varphi'(t)]|u_t^{p,\varepsilon}|^2 e^{-\theta t} dx dt;$$

$$I_2 = \int_{Q_\tau} (Cu_t^{p,\varepsilon}, u_t^{p,\varepsilon})e^{-\theta t} dx dt \ge \int_{Q_\tau} c_1(t)|u_t^{p,\varepsilon}|^2 e^{-\theta t} dx dt;$$

$$I_3 = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}D^\beta u^{p,\varepsilon}, D^\alpha u_t^{p,\varepsilon})e^{-\theta t} dx dt \ge \\ \ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^{p,\varepsilon}|^2 e^{-\theta\tau} dx + \frac{1}{2}(\theta a_0 - a_1)\int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^{p,\varepsilon}|^2 e^{-\theta t} dx dt,$$

где a_1 определяется коэффициентами $A_{\alpha\beta t}$, областью Ω и числами m, n;

$$I_4 = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le m} (B_\alpha D^\alpha u^{p,\varepsilon}, u_t^{p,\varepsilon})e^{-\theta t} dx dt \ge \\ \ge -\frac{1}{2}\int_{Q_\tau} [\delta_1\varphi'(t)|u_t^{p,\varepsilon}|^2 + \frac{\gamma_0 b_0(t)}{\delta_1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^{p,\varepsilon}|^2] e^{-\theta t} dx dt,$$

$\delta_1 > 0$, γ_0-постоянная из неравенства Фридрихса ([1], стр.44);

$$I_5 = \int_{Q_\tau} (F, u_t^{p,\varepsilon})e^{-\theta t} dx dt \le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} [\delta_1\varphi'(t)|u_t^{p,\varepsilon}|^2 + \frac{1}{\delta_1}\frac{|F|^2}{\varphi'(t)}] e^{-\theta t}.$$

Учитывая полученные оценки интегралов $I_1, \ldots, I_5$ мы из равенства (6) получим неравенство

$$\int_{\Omega_\tau} [(\varphi(\tau) + \varepsilon)|u_t^{p,\varepsilon}|^2 + a_0 \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^{p,\varepsilon}|^2] e^{-\theta\tau} dx + \\ + \int_{Q_\tau} [(\theta\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} - \varphi_1(t) + \frac{2c_1(t)}{\varphi'(t)} - 5\delta_1)\varphi'(t)|u_t^{p,\varepsilon}|^2 + \\ + (a_0\theta - a_1 - \frac{b_0(t)\gamma_0}{\delta_1}) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^{p,\varepsilon}|^2] e^{-\theta t} dx dt \le \\ \le \frac{1}{\delta_1}\int_{Q_\tau} \frac{|F(x,t)|^2}{\varphi'(t)} dx dt. \tag{7}$$

На основании условий теоремы можем выбрать числа $\theta > 0$, $\delta_1 > 0$, $0 < \tau_0 < T$ такими, что на промежутке $[0, \tau_0]$ будут справедливы неравенства:

$$\theta\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} - \varphi_1(t) + \frac{2c_1(t)}{\varphi'(t)} - 5\delta_1 \geq 0;$$

$$a_0\theta - a_1 - \frac{2b_0(t)\gamma_0}{\delta_1} \geq 0.$$

Тогда из неравенства (7) на промежутке $[0, \tau_0]$ следует оценка

$$\int\limits_{\Omega_\tau}[\varphi(\tau)|u_t^{p,\varepsilon}|^2 + \sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^{p,\varepsilon}|^2]dx \leq \mu_1\int\limits_{Q_\tau}\frac{|F|^2 dxdt}{\varphi'(t)}. \tag{8}$$

Сделаем в системе (4) замену $u^{p,\varepsilon} = t^{-\gamma}v$, $\gamma > 0$, затем продифференцируем ее по t, умножим каждое уравнение соответственно на функцию $(c_k^{p,\varepsilon}t^\gamma)_{tt}e^{-\theta t}$, $\theta > 0$, просуммируем по k от 1 до p и проинтегрируем по промежутку $[0, \tau]$, $\tau \leq \tau_0$. После выполнения этих операций получим равенство

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[((\Phi + \varepsilon E)v_{ttt}, v_{tt}) + (\Phi_t v_{tt}, v_{tt}) + (C^0 v_{tt}, v_{tt}) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}(A_{\alpha\beta}D^\beta v_t, D^\alpha v_{tt}) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}(A_{\alpha\beta t}D^\beta v, D^\alpha v_{tt}) + \sum_{|\alpha|\leq m}(B_\alpha D^\alpha v_t, v_{tt}) + \sum_{|\alpha|\leq m}(B_{\alpha t}D^\alpha v, v_{tt}) +$$
$$+ (C_t^0 v_t, v_{tt}) + (B^0 v_t, v_{tt}) + (B_t^0 v, v_{tt}) - (F_t^\gamma, v_{tt})\Big]e^{-\theta t}dxdt = 0, \tag{9}$$

где $C^0(x,t) = C(x,t) - 2\gamma t^{-1}\Phi(x,t)$, $B^0(x,t) = \gamma(\gamma+1)t^{-2}\Phi(x,t) - \gamma t^{-1}C(x,t)$, $F^\gamma = t^\gamma F$. На основании условий теоремы из равенства (9) получим оценку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}[\varphi(\tau)|v_{tt}|^2 + \sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha v_t|^2]dx \leq \mu_2\int\limits_{Q_\tau}\frac{\rho_2(t)|F|^2 + t^{2\gamma}|F_t|^2}{\varphi'(t)}dxdt, \tag{10}$$

$$\tau \in [0, \tau_1], \ \tau_1 \leq \tau_0.$$

Здесь постоянная μ_2 не зависит от p и ε.

Учитывая связь $u^{p,\varepsilon}$ с v, из неравенств (8), (10) получим оценку

$$\int\limits_{Q_T}(t^{2\gamma}|u_{tt}^{p,\varepsilon}|^2 + t^{2\gamma}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_t^{p,\varepsilon}|^2 + \sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^{p,\varepsilon}|^2)dxdt \leq \mu_3, \tag{11}$$

причем μ_3 не зависит от p и ε. В силу (11) существует подпоследовательность $\{u^j(x,t)\} \subset \{u^{p,\varepsilon}(x,t)\}$ сходящаяся слабо к функции $u(x,t)$, которая и является решением почти всюду задачи (1)-(3) с требуемым свойством. Единственность решения доказывается также, как первая часть теоремы.

Замечание 1. Если кроме условий теоремы $\int\limits_0^T \frac{dt}{t^\rho\varphi'(t)} < \infty$, $\rho < 0$, то начальные условия для системы (1) можно задать в виде

$$u(x,0) = 0, \ \lim_{t\to+0} t^{-\rho/2}\sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t) = 0.$$

Замечание 2. Если $\nu_1 > 0$, то задача (1)-(3) может иметь более одного решения.

Теорема 2 . *Пусть выполняются все условия теоремы 1 и, кроме того, $\gamma = 0$, $F(x,0) = 0$. Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ такая, что*

$$\int_{Q_T} \Big[(\Phi(x,t)u_{tt} + C(x,t)u_t + \sum_{|\alpha|\le m} B_\alpha(x,t)D^\alpha u - F(x,t), \psi - u_t) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha(\psi - u_t))\Big]\, dxdt \ge 0$$

$\forall\psi \in L^2((0,T); (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N)$, $\psi \in K$ *почти для всех* $t \in [0,T]$;
$u \in L^\infty((0,T); (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N)$, $u_t \in L^\infty((0,T); (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N)$;
$\sqrt{\varphi}u_{tt} \in L^\infty((0,T); (L^2(\Omega))^N)$, $u \in K$ *почти для всех* $t \in [0,T]$;
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$,

где K-выпуклое замкнутое подмножество из $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$, содержащее нуль.

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1 с использованием метода штрафа ([2], стр.425).

В заключение отметим, что вырождающимся уравнениям посвящено большое количество работ. Укажем лишь некоторые из них: [3]-[9] наиболее близкие к предложенной статье.

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас Л.* , Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения // М. : Мир, – 1978.
2. *Лионс Ж.-Л.* , Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // М. : Мир, – 1972.
3. *Барановский Ф.Т.* , Смешанная задача для сильно вырождающегося на начальной плоскости гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, – *N 3*. – С. 479–492.
4. *Глазатов С.Н.* , О корректности смешаной задачи для вырождающегося гиперболического уравнения с произвольным характером вырождения // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, – *N 2*. – С. 60–66.
5. *Врагов В.Н.* , Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, – *N 1*. – С. 24–31.
6. *Бубнов Б.А.* , Смешанная задача для некоторых параболо-гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, – *N 3*. – С. 494–501.
7. *Лавренюк С.П.* , Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластинки // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, – *N 8*. – С. 1375–1383.
8. *Дерябина А.В.* , О растущих решениях сильно вырождающихся гиперболических систем // Матем. сборник. – 1990. – **181**, – *N 4*. – С. 447–463.
9. *Егоров И.Е.* , К теории выроджающихся гиперболических уравнений второго порядка // Сиб. матем. журн. – 1990. – **31**, – *N 2*. – С. 68–75.